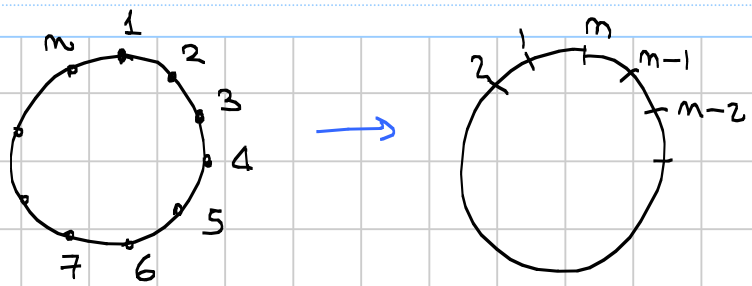
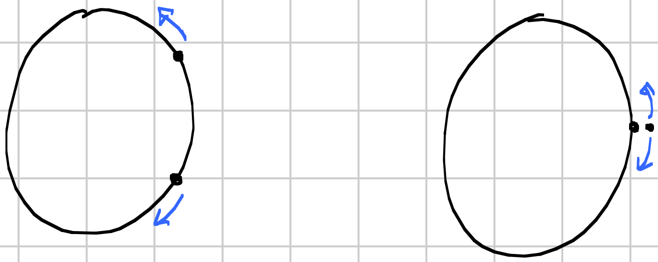
PREIMO 2010 — CP

Titolo nota 19/05/2010

Problema 5



Mosse



Possibile $\iff n \equiv 1, 5 \ (6)$

<u>Invariante</u>: detto u_k il numero di monete nel vertice V_k

$$I = \sum k \cdot u_k \quad (\text{mod } n)$$

verifica facile

$$I_{\text{inizio}} = \sum k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$I_{\text{fine}} = \sum k(n+1-k) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$n \mid (I_{\text{inizio}} - I_{\text{fine}}) \iff n \mid \boxed{\frac{n(n+1)(n-1)}{6}}$$

Deve essere intero

avviene $\iff n \equiv \pm 1 \ (6)$

Resta da mostrare che in questi casi si può !!!
Fisso una moneta a piacere e andrà sempre in senso antiorario.
Muovo tutte le altre in senso orario fino alla posizione voluta.
In questo modo sistemo tutte le monete meno una, ma quest'una va al posto giusto per salvare l'invariante.

— o — o —

$\boxed{\text{Problema 6}}$ $\exists\, x > 4$ con questa propr.

" comunque scelga 2 dip., il tempo in cui esattamente uno è al bar è $\geq x$ ore ".

Quanti sono al max i dipendenti.

$D_1, \dots, D_n$ i dipendenti $\quad n =$ numero

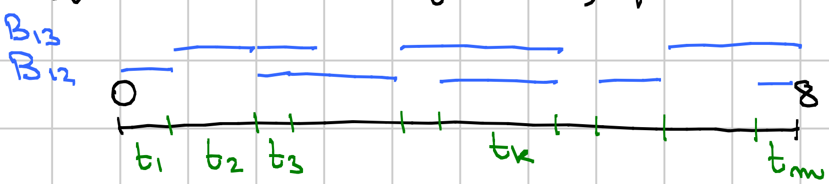
B_{ij} = insiemi di tempi in cui esatt. uno tra D_i e D_j sta al bar

$$T = \sum_{i<j} |B_{ij}|$$

↑ lunghezza

<u>Conto 1</u>: Fissati i, j so che $|B_{ij}| \geq x$, quindi $T \geq \binom{n}{2} x$

<u>Conto 2</u>:



Nel k intervallino temporale c'erano L_k persone al lavoro e P_k persone in pausa

Il k intervallino è contato in T $\quad L_k \cdot P_k$ volte

Quindi $$T = \sum_{k=1}^{m} L_k \cdot P_k \cdot t_k$$

Quanto vale al max $L_k \cdot P_k$ sapendo che $L_k + P_k = n$

Se $n = 2d$, allora $L_k \cdot P_k \leq d^2$

Se $n = 2d+1$, allora $L_k \cdot P_k \leq d(d+1)$

$\boxed{n=2d}$ $$\binom{n}{2} x \leq T \leq d^2 \sum t_k = 8d^2$$

$$\binom{2d}{2} x \leq 8d^2 \qquad \frac{\cancel{2}d(2d-1)}{\cancel{2}} x \leq 8d^{\cancel{2}} \dots \qquad d \leq \frac{x}{2x-8}$$

Quindi $$n \leq 2d \leq 2\left[\frac{x}{2x-8}\right]$$

$\boxed{n=2d+1}$ $$\binom{2d+1}{2} x \leq 8d(d+1) \quad --- \quad d \leq \frac{8-x}{2x-8}$$

$$n \le 2d+1 = 2\left[\frac{8-x}{2x-8}\right]+1$$

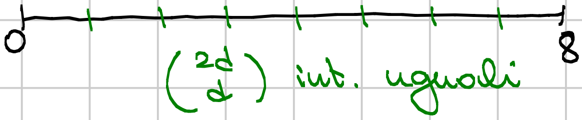
sempre + grande

$\alpha = \dfrac{x}{2x-8}$ allora $\boxed{n \le 2[\alpha]}$ nel caso pari

$n \le 2[\alpha-1]+1$ nel caso dispari

Quindi $n \le 2\left[\dfrac{x}{2x-8}\right]$

Resta da fare l'esempio



In ogni intervallo mando al bar un diverso sottoinsieme di d persone.

Controllo che i tempo in cui D_1 e D_2 (wlog) sono esatt. 1 al bar sia $\ge x$.

Conto i sottoinsiemi di $\{1, 2, \dots, 2d\}$ che contengono esatt. uno tra 1 e 2.

con d elementi

$$\underbrace{\binom{2d-1}{d-1}}_{\text{contengono 1}} + \underbrace{\binom{2d-1}{d-1}}_{\text{contengono 2}} - \underbrace{2\binom{2d-2}{d-2}}_{2\times \text{ contengono 1 e 2}}$$

$$2\binom{2d-2}{d-1} = \text{intervalli di } B_{12}$$

Moltiplico per $\dfrac{8}{\binom{2d}{d}}$ e spero che $2\binom{2d-2}{d-1}\cdot\dfrac{8}{\binom{2d}{d}} \ge x$

... conto ... stessa equazione che definisce d.

$\boxed{\text{Problema 8}}$ $S = \{x_1, x_2, \dots, x_{\ell+k}\} \subseteq [0,1]$ $\quad |A| = k \quad A \subseteq S$

si dice equilibrato se

$$\left| \text{media}(A) - \text{media}(S \setminus A) \right| \leq \frac{k+\ell}{2k\ell}$$

Tesi: esistono almeno $\frac{2}{k+\ell}\binom{k+\ell}{k}$ insiemi equilibrati.

$\boxed{\text{Osservazione 1}}$

$$\text{media}(S \setminus A) = \frac{(k+\ell)\,\text{media}(S) - k\,\text{media}(A)}{\ell}$$

$$\left| \text{media}(A) - \text{media}(S \setminus A) \right| = \left| \frac{\ell}{\ell}\,\text{media}(A) - \frac{(k+\ell)}{\ell}\,\text{media}(S) + \frac{k}{\ell}\,\text{media}(A) \right|$$

$$= \frac{\cancel{k+\ell}}{\cancel{\ell}} \left| \text{media}(A) - \text{media}(S) \right| \leq \frac{\cancel{k+\ell}}{2k\cancel{\ell}}$$

Fatto: A è equilibrato $\iff$

$$\left| \text{media}(S) - \text{media}(A) \right| \leq \frac{1}{2k}$$

<u>Osservazione 2</u> Se A e A' differiscono di 1 elemento, di quanto diff. le loro medie?

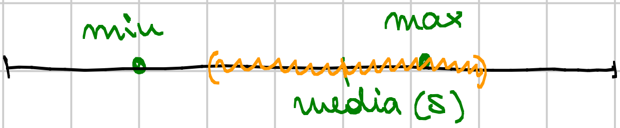
$$\text{media}(A') = \frac{k\,\text{media}(A) + y - x}{k} = \text{media}(A) + \frac{y-x}{k}$$

y e x sono tali che $A' = (A \setminus \{x\}) \cup \{y\}$

La diff. è $\frac{y-x}{k}$ quindi la $|\text{diff.}|$ è $\leq \frac{1}{k}$

Idea: passando 1 el. per volta da un sottoinsieme con media sotto ad uno con media sopra si passa per forza nell'intervallo buono !!!

Osservazione 3 Sia $y_1, y_2, \dots, y_{k+l}$ una qualunque perm. degli el. di S.
Considero sottoinsiemi di k consecutivi in senso ciclico.
Questi sono k+l sottoinsiemi.
Claim: almeno 2 di questi sono buoni



Calcolo le k+l medie. Se la max è sopra e la min è sotto $\}$ ⇒ ok

Il problema è se min sotto e max è dentro (o viceversa)
Qui occorre osservare che non è possibile che una sola delle k+l medie sia sopra media (S) e le altre fuori a sx dall'intervallo.

Quante medie buone ho trovato? Almeno

$2\,(k+l)!$ 2 · numero permutazioni

Quante volte è stata contata ognuna?

$$\underbrace{k!\,l!}_{\text{permutazioni in cui i k el. compaiono consecutivi (ciclicamente)}}\ \underbrace{(k+l)}$$

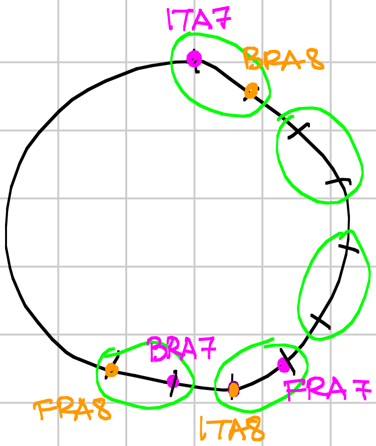
← posizione dei k elementi all'interno della permutazione

Totale $\dfrac{2(k+l)!}{k!\,l!\,(k+l)} = \dfrac{2}{k+l}\dbinom{k+l}{k}$

— o — o —

Problema 7 (a) 2 persone x 50 nazioni intorno ad un tavolo rotondo.

Vogliamo fare 2 gruppi da 50 (uno per nazione) in modo che ci siano al max 2 persone consecutive dello stesso gruppo



Accoppio a 2 a 2 le posizioni. Se in ogni coppia c'è un L e un D, la condizione di non eccessiva vicinanza è rispettata.

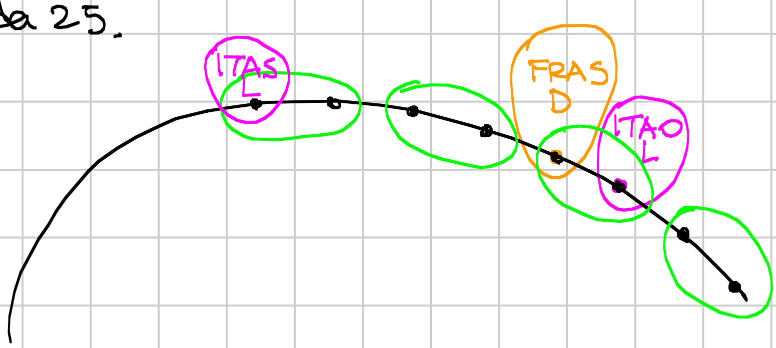
... Assegno uno per uno gli incarichi procedendo per condizioni necessarie
Quando chiudo un po' di coppie riparto dove mi pare.

(b) 4 x 25 nazioni. Fare 4 gruppi in modo che
- ogni gruppo ne ha 1 per nazione
- no 2 dello stesso gruppo vicini

Idea: splitto ogni nazione in 2 gruppi arbitrariamente. Risolvo il punto (a) su 50 nazioni. Ottengo 2 gruppi da 50 che contengono, per ogni nazione, 1 del primo tipo (tipo S) e 1 del secondo tipo (tipo O). observer

spesati

Ora occorre dividere i 2 gruppi da 50 ciascuno in 2 gruppi da 25.



1° ITAS L

2° cerco ITAO dello stesso gruppo

... Bisogna dim. che si chiude giusto ...

— · — · —